Rein analytischer

Beweis des Lehrsatzes,

daß

zwischen je zwey Werthen, die einentgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege ;

von

Bernard Bolzano,

Weltpriester, Doctor der Philosophie, k. k. Professor der Religionswisseschaft, und ordentlichem Mitgliede der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.

Für die Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften.

Prag 1817,

Gedruckt bei Gottlieb Haase.

Vorrede.

Zwey Sätze in der Lehre von den Gleichungen gibt es, in Betreff deren man noch vor Kurzem sagen konnte, daß ein völlig richtiger Beweis derselben unbekannt sey. Der eine ist der Satz: daß zwischen je zwey Werthen der unbekannten Größe, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, allemahl wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegen masse. Der andere lautet: daß jede algebraische rationale ganze Function einer veränderlichen Größe sich in reale Factoren des ersten oder zweyten Grades zerlegen lasse. - Von dem letzteren Satze hat uns, nach mehreren mißlungenen Versuchen eines d'Alembert, Euler, de Foncenex, La Grange, La Place, Klügel u. A., im vorigen Jahre endlich Hr. Gauß ein paar Beweise geliefert, die kaum mehr etwas zu wünschen übrig lassen dürften. Es beschenkte uns zwar dieser vortreffliche Gelehrte schon in dem Jahre 1799 mit einem Beweise für diesen Satz *), der aber noch den von ihm selbst eingestandenen Fehler hatte, daß er die rein analytische Wahrheit auf eine geometrische Betrachtung gründete. Seine zwey neuesten Beweise **) aber sind auch von diesem Fehler ganz frei; indem die trigono-metrischen Functionen, die in dem letzten vorkommen, in einer rein analytischen Bedeutung aufgefaßt werden können und sollen.

Der andere Satz, dessen wir oben erwähnt, gehört zwar eben nicht zu denjenigen Sätzen, welche das Nachdenken der Gelehrten bisher auf eine ganz vorzügliche Weise beschäftigt hätten. Inzwischen finden wir doch, daß Mathematiker von großem Ansehen sich mit diesem Satze befaßt, und schon

---

*) Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii. 4°. 1799.

**) Demonstratio nova altera etc., und Demonstratio nova tertia; beyde vom Jahre 1816.

verschiedene Beweisarten für ihn versucht haben. Wer sich hievon überzeugen will, vergleiche nur die verschiedenen Darstellungen, welche von diesem Satze z. B. Kästner *), Clairaut **), Lacroix ***), Metternich +), Klügel ++), La Grange +++), Rösling ++++) u. m. A. gegeben haben.

Daß aber keine dieser Beweisarten als genügend angesehen werden könne, zeigt sich bei einer genaueren Prüfung derselben sehr bald.

---

*) Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen. 3. Aufl. § 316.

**) Elemens d'Algebre. 5eme Edit. Supplemens. Chap. I. no. 16.

***) Elemens d'Algebre. 7eme Edit.

+) In seiner Uibersetzung des eben angeführten Werkes von Lacroix. Mainz. 1811. § 211.

++) In seinem mathematischen Wörterbuche. 2. Band S. 447 ff.

+++) Traité de la resolution des équations numeriques de tous les degrés. Paris. 1808.

++++) Grundlehren von den Formen, Differenzen. Differentialien und Integralien der Functionen. I. Teil. § 49.

I. Bei der gewöhnlichsten Beweisart stützt man sich auf eine aus der Geometrie entlehnte Wahrheit: daß nämlich eine jede kontinuierliche Linie von einfacher Krümmung, deren Ordinaten erst positiv, dann negativ sind (oder umgekehrt), die Abscissenlinie nothwendig irgendwo in einem Punkte, der zwischen jenen Ordinaten liegt, durchschneiden müsse. Gegen die Richtigkeit sowohl, als auch gegen die Evidenz dieses geometrischen Satzes ist gar nichts einzuwenden. Aber eben so offenbar ist auch, daß es ein nicht zu duldender Verstoß gegen die gute Methode sei, Wahrheiten der reinen (oder allgemeinen) Mathematik (d. h. der Arithmetik. Algebra oder Analysis) aus Betrachtungen herleiten zu wollen, welche in einen bloß angewandten (oder speciellen) Teil derselben, namentlich in die Geometrie gehören. Und hat man die Unschicklichkeit einer dergleichen *metabasis eis allo genos* nicht längst schon gefühlt und anerkannt? Hat man sie nicht schon in hundert andern Fällen, wo man ein Mittel gewußt, vermieden, und diese Vermeidung sich zum Verdienste angerechnet? *) Muß man sich also nicht, wenn man anders folgerecht sein will, dieses aueh hier zu thun bestreben? -

*) Ein Beyspiel geben die vorhin angeführten Abhandlungen des Hrn. Prof. Gauß.

Denn in der That, wer immer bedenket, daß die Beweise in der Wissenschaft keineswegs bloße Gewißmachungen, sondern vielmehr Begründungen d. h. Darstellungen jenes objectiven Grundes, den die zu beweisende Wahrheit hat, seyn sollen: dem leuchtet von selbst ein, daß der echt wissenschaftliche Beweis, oder der objective Grund einer Wahrheit, welche von allen Größen gilt, gleich viel, ob sie im Raume oder nicht im Raume sind, unmöglich in einer Wahrheit liegen könne, die bloß von Größen, welche im Raume sind, gilt. Bey Festhaltung dieser Ansicht begreift man vielmehr, daß ein dergleichen geometrischer Beweis, wie in den meisten Fällen, so auch in dem gegenwärtigen, ein wirklicher Zirkel sey. Denn ist gleich die geometrische Wahrheit, auf die man sich hier beruft, (wie wir schon eingestanden haben) höchst evident, und bedarf sie also keines Beweises als Gewißmachung; so bedarf sie nichts desto weniger doch einer Begründung. Denn sichtbar sind die Begriffe, aus denen sie besteht, so zusammengesetzt, daß man nicht einen Augenblick anstehen kann, zu sagen, sie gehöre keineswegs zu jenen einfachen Wahrheiten, welche man eben deßhalb, weil sie nur Grund von andern, selbst keine Folgen sind, Grundsätze oder Grundwahrheiten nennet; sie sey vielmehr ein Lehrsatz oder eine Folgewahrheit, d. h. eine solche Wahrheit, die ihren Grund in gewissen andern hat, und daher auch in der Wissenschaft durch Herleitung aus denselben, dargethan werden muß *). Nun denke, wer da will, dem objectiven Grunde nach, warum eine Linie unter den vorhin erwähnten Umständen ihre Abscissenlinie durchschneide: so wird gewiß jeder sehr bald gewahr werden, daß dieser Grund in nichts Anderm liege, als in jener allgemeinen Wahrheit, zufolge deren jede stetige Function von x, welche für einen Werth von x positiv, für einen andern negativ wird, für irgend einen dazwischen liegenden Werth von x zu Null werden muß. Und dieß ist eben die Wahrheit, die hier bewiesen werden soll. Weit gefehlt also, daß diese letztere aus jener hergeleitet werden dürfte (wie dieß in der Beweisart, die wir jetzt prüfen, geschieht): muß vielmehr umgekehrt diese von jener abgeleitet werden, wenn man die Wahrheiten in der Wissenschaft eben so darstellen will, wie sie nach ihrem objectiven Zusammenhange mit einander verbunden sind.

II. Nicht minder verwerflich ist der Beweis, den Einige aus dem Begriffe Stetigkeit einer Function, mit Einmengung der Begriffe von Zeit

---

**) Man vergleiche über dieß Alles meine Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Iste Lieferung. Prag 1810. II. Abth. §§. 2.10. 20. 21, wo man die logischen Begriffe, welche ich hier als bekannt voraus setze, entwickelt findet.

und Bewegung, führten. "Wenn sich zwey Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, sagen sie, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, und wenn für $x= \alpha$, $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$; für $x = \alpha$ aber $f(\beta) > \varphi(\beta)$ ist: so muß es irgend einen zwischen α und β liegenden Werth u geben, für welchen $f(u) = \varphi(u)$ ist. Denn wenn man sich vorstellt, daß die veränderliche Größe x in diesen beyden Functionen nach und nach alle zwischen α und β liegende Werthe, und in demselben Augenblicke immer beyderseits denselben Werth annimmt: so ist im Anfange dieser stetigen Werthveränderung von x, $f(x) < \varphi(x)$, und am Ende $f(x) > \varphi(x)$. Da aber beyde Functionen vermöge ihrer Stetigkeit erst alle mittleren Werthe durchgehen müssen, bevor sie zu einem höheren gelangen können; so muß es irgend einen mittleren Augenblick geben, in welchem beyde einander gleich waren. - Dieses versinnlicht man noch durch das Beyspiel der Bewegung zweyer Körper, deren der eine anfangs hinter dem andern war, zuletzt ihm vorgeeilt ist, und folglich nothwendig einmahl bey ihm vorbey gegangen seyn muß. -

Niemand wird wohl in Abrede stellen, daß der Begriff der Zeit, und vollends jener der Bewegung in der allgemeinen Mathematik eben so fremdartig sey, als der des Raumes. Gleichwohl, wenn diese zwey Begriffe hier nur der Erläuterung wegen eingemengt waren, hätten wir nichts dagegen zu erinnern.

Denn auch wir sind keineswegs einem so übertriebenen Purismus zugethan, der, um die Wissenschaft von allem Fremdartigen rein zu erhalten, verlangt, daß man in ihrem Vortrage nicht einmahl einen aus fremdem Gebiethe entlehnten Ausdruck, auch nur in uneigentlicher Bedeutung und in der Absicht aufnehme, um eine Sache so kürzer und klärer zu bezeichnen, als es durch eine in lauter eigenthümlichen Benennungen abgefaßte Beschreibung geschehen kann, oder nur, um den Uibelklang der steten Wiederholung der nähmlichen Worte zu meiden, oder um durch den bloßen Nahmen, den man der Sache beylegt, schon an ein Beyspiel zu erinnern, das zur Bestätigung der Behauptung dienen kann. Hieraus ersieht man zugleich, daß wir auch Beyspiele und Anwendungen nicht im Geringsten für etwas Solches halten, das der Vollkommenheit des wissenschaftlichen Vortrages Abbruch thue. Nur dieses fordern wir dagegen strenge: daß man die Beyspiele nie statt der Beweise aufstelle, und auf bloß uneigentlich gebrauchte Redensarten, und auf die Nebenvorstellungen, die sie mit sich führen, niemahls die Wesenheit des Schlusses selbst gründe, so daß der letztere wegfällt, sobald man jene ändert. Nach diesen Ansichten dürfte sich also noch allenfalls die Einmengung des Begriffes der Zeit in obigem Beweise entschuldigen lassen; weil auf die Redensarten, die von ihm hergenommen sind, kein Schluß gegründet wird, der nicht auch ohne ihn gälte. Keineswegs aber kann die zuletzt gegebene Versinnlichung durch die Bewegung eines Körpers für etwas Mehreres angesehn werden, als für ein bloßes Beyspiel, das den Satz selbst nicht beweist, vielmehr durch ihn erst bewiesen werden muß.

a. Halten wir uns also mit Weglassung dieses Beyspiels nur an das übrige Raisonnement. Bemerken wir zuvörderst, daß in demselben ein unrichtiger Begriff der Stetigkeit zu Grunde gelegt sey. Nach einer richtigen Erklärung nähmlich versteht man unter der Redensart, daß *eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x, die inner- oder außerhalb gewisser Grenzen liegen*), nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + o) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man wo so klein, als man nur immer will, annehmen kann*; oder es sey (nach den Bezeichnungen, die wir im §. 14. des binomischen Lehrsatzes u. s. w. Prag 1816. eingeführt) $f(x + \omega) = f(x) + \Omega$. Daß aber, wie man in diesem Beweise annimmt, die stetige Function niemahls zu einem höheren Werthe gelange, ohne erst alle niedrigeren durchgegangen zu seyn, d.h. daß $f(x - n\Delta x)$ jeden zwischen $f(x)$ und $f(x + \Delta x)$ liegenden Werth annehmen könne, wenn man n nach Belieben zwischen 0 und +1 nimmt: das ist wohl eine sehr wahre Behauptung, aber sie kann nicht als Erklärung des Begriffes der Stetigkeit angesehn werden, sondern ist vielmehr ein Lehrsatz über denselben; und zwar ein solcher, der sich nur erst nach Voraussetzung des Satzes selbst beweisen läßt, zu dessen Beweise man ihn hier anwenden will. Denn wenn M irgend eine zwischen $f(x)$ und $f(x + \Delta x)$ liegende Größe bedeutet; so ist die Behauptung, daß es irgend einen zwischen 0 und +1 liegenden Werth von n gebe, fir welchen $f(x + n\Delta x) = M$ ist, nur ein besonderer Fall von der allgemeinen Wahrheit, daß, wenn $f(x) < \varphi(x)$ und $f(x + \Delta x) > \varphi(x + \Delta x)$ ist, es irgend einen mittleren Werth $x + n\Delta x$ geben müsse, für welchen $f(x + n\Delta x)\ \varphi(x + n\Delta x)$ ist. Aus dieser allgemeinen Wahrheit nähmlich ergibt sich jene erstere Behauptung in dem besondern Falle, wo die Function $\varphi(x)$ in eine constante Größe M übergehet.

---

*) Es gibt Functionen, welche für alle Werthe ihrer Wurzel stetig veränderlich sind, z. B. $ax + bx$. Allein es gibt auch andre, die sich nur inner- oder außerhalb gewisser Grenzwerthe ihrer Wurzel nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern. So ändert sich $x+ - \sqrt{(l - x)(2-x)}$ nur für alle Werthe von x die $<+1$, oder $>+2$ sind, stetig; nicht aber für die Werthe, die zwischen + 1 und + 2 liegen.

b. Aber gesetzt auch, man könnte diesen Satz auf einem andern Wege darthun: doch würde der Beweis, den wir prüfen, noch einen andern Fehler haben. Daraus nähmlich, daß $f(\alpha) > \varphi(\alpha)$ und $f(\beta) < \varphi(\beta)$ ist, würde nur folgen, daß wenn u irgend ein zwischen a und b liegender Werth ist, bei welchem $\varphi(u) > \varphi(\alpha)$ aber $< \varphi(\beta)$ ist; so werde $f(x)$, bevor es aus $f(\alpha)$ in $f(\beta)$ übergeht, d. h. bey irgend einem x, das zwischen α und β liegt, ebenfalls $= \varphi(u)$. Ob aber dieses bey eben demselben Werthe von x, der = u ist, geschehe; d. h. (weil u jeden beliebigen Werth zwischen α und β bedeuten kann, der $\varphi(u) > \varphi(a)$ und $< \varphi(b)$ macht) ob es irgend einen zwischen α und β liegenden Werth von x gibt, bey welchem beyde Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ einander gleich werden: das würde noch immer nicht folgen.

c. Das Täuschende des ganzen Beweises beruhet überhaupt nur auf der Einmengung des Begriffes der Zeit. Denn wenn man diesen wegläßt, so zeigt sich alsbald, daß der Beweis nichts anders, als eine Wiederholung des zu beweisenden Satzes selbst mit andern Worten ist. Denn sagen, daß die Function $f(x)$, bevor sie aus ihrem Zustande des Kleinerseyns in den des Größerseyns übergeht, erst durch den des Gleichseyns mit $\varphi(x)$ hindurch gehen müsse; heißt ohne Zeitbegriffe sagen, daß unter den Werthen, die $f(x)$ annimmt, wenn man für x jeden beliebigen Werth zwischen α und β setzt, auch einer sey, der $f(x) = \varphi(x)$ macht; was der zu beweisende Satz selbst ist.

III. Andere beweisen unsern Satz, indem sie folgenden, entweder ganz ohne Beweis, oder doch nur gestützt auf einige aus der Geometrie entlehnte Beyspiele, zum Grunde legen: "Jede veränderliche Größe kann ans einem bejahten Zustande im einen verneinten nur durch den Zustand des Nullseyns oder den der Unendlichkeit übergehen." — Da nun das Resultat einer Gleichung bey keinem endlichen Werthe der Wurzel unendlich groß werden kann: so muß, wie sie schließen, jener Uibergang hier durch Null geschehen.

a. Wenn man in obigem Satze die uneigentliche Vorstellung eines Uiberganges, die den Begriff einer Veränderung in Zeit und Raum enthält, absondern will; wodurch von selbst auch schon der ungereimte Ausdruck eines Zustandes des Nichtvorhandenseyns wegfällt: so bekömmt man am Ende folgenden Satz: "Wenn eine veränderliche Größe, die von einer andern x abhängig ist, für $x = \alpha$ bejaht, für $x = \beta$ verneint befunden wird: so gibt es jedesmahl einen zwischen

α und β gelegenen Werth von x, für den sie Null, oder aber einen, für den sie unendlich wird. Und nun bemerkt gewiß ein Jeder, daß eine so zusammengesetzte Behauptung keine Grundwahrheit sey, sondern bewiesen werden müsse; daß aber ihr Beweis kaum leichter seyn dürfte, als der des Satzes selbst, zu dessen Behufe man sie aufstellen will. b. Ja bey genauerer Betrachtung zeigt sich, daß sie im Grunde sogar identisch mit ihm sey. Denn es ist nicht zu vergessen, daß diese Behauptung eigentlich nur dann erst wahr ist, wenn sie von bloß stetig veränderlichen Größen verstanden wird. So hat z. B. die Function $x + \sqrt{(x - 2)(x + 1)}$ für $x = +2$ wohl allerdings einen bejahten, für $x = -1$ einen verneinten Werth; dennoch, weil sie sich innerhalb dieser Grenzen nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert: so gibt es auch keinen innerhalb + 2 und -1 liegenden Werth von x, für welchen sie Null oder unendlich würde. Schränkt man aber die Behauptung auf bloß stetig veränderliche Größen ein; so muß man auch diejenigen Functionen, die für einen gewissen Werth ihrer Wurzel unendlich werden, ausschließen. Denn eine solche Function, wie $a/(b - x)$, ist eigentlich nicht für alle Werthe von x, sondern nur für alle, die > oder < b sind, stetig veränderlich. Denn für den Werth $x = b$ erhält sie gar keinen bestimmten Werth, sondern wird das, was man unendlich groß nennt. Also kann man auch nicht sagen, daß die Werthe, die sie für $x = b + \omega$ annimmt, die alle bestimmt sind, dem Werthe, den sie für $x = b$ erhält, so nahe kommen können, als man nur immer will. Und dieß gehört doch zu dem Begriffe der Stetigkeit (II. a). Setzt man nun zu der obigen Behauptung den Begriff der Stetigkeit noch hinzu und läßt dagegen den Fall des Unendlichwerdens hinweg: so geht sie wörtlich in den Satz, der erst bewiesen werden sollte, über; nähmlich, daß jede stetig veränderliche Function von x, welche für $x = \alpha$ bejaht, für $x = \beta$ verneint ist, für irgend einen zwischen α und β liegenden Werth zu Null werden müsse.

IV. Irgendwo liest man folgenden Schluß: "Weil f(x) für $x = \alpha$ bejaht, für $x = \beta$ verneint ist: so muß es zwischen α und β zwey Größen a und b geben, bey denen der Uibergang aus den bejahten Werthen der f(x) in die verneinten geschieht; so zwar, daß zwischen a und b kein Werth von x mehr fällt, für den f(x) noch bejaht oder verneint wäre." U. s. w. Dieser Irrthum bedarf kaum einer Widerlegung und würde hier gar nicht angeführt werden, wenn er nicht zum Beweise diente, wie undeutlich noch die Begriffe mancher selbst angesehener Mathematiker über diesen Gegenstand sind. Es ist doch bekannt genug, daß es zwischen je zwey einander auch noch so nahe stehenden Werthen einer unabhängig veränderlichen Größe, dergleichen die Wurzel x einer

Function ist, immer noch unendlich viele mittlere Werthe gebe; und eben so, daß eine jede stetige Function kein letztes x, das sie bejaht, und kein erstes x, das sie verneint macht, also kein solches a und b, wie hier beschrieben wird, besitze!

V. Das Mißlingen dieser Versuche, den Satz, von dem wir handeln, unmittelbar zu beweisen, leitete auf den Gedanken, ihn aus dem zweyten Satze, dessen wir anfangs erwähnt, nähmlich aus dem von der Zerlegbarkeit jeder Function in gewisse Factoren abzuleiten. Es ist auch kein Zweifel, daß, wenn dieser zugegeben wird, jener aus ihm geschlossen werden könne. Aber der Umstand ist nur, daß eine solche Herleitung desselben keine echt wissenschaftliche Begrün-dung heissen könnte, indem der zweyte Satz offenbar eine viel zusammengesetztere Wahrheit ausspricht, als unser gegenwärtiger; daher sich jener wohl auf diesen, nicht aber umgekehrt dieser auf jenen gründen kann. Wirklich ist es auch noch Niemand gelungen, jenen ohne Voraussetzung von diesem zu beweisen. Betreffend die Beweise, deren Unstatthaftig-keit schon Hr. Gauß in seiner Abhandlung vom Jahre 1799 gezeigt hat; so ist es eben darum, weil sie bereits als unstatthaft erwiesen worden sind, nicht nöthig, zu untersuchen, ob sie auf unsern Satz sich gründen oder nicht. Der Beweis des Herrn La Place*) hat gleichfalls seine Fehler, die wir jedoch schon darum hier nicht auseinander zu setzen brauchen, weil derselbe ausdrücklich auf unsern gegenwärtigen Satz gegründet ist. Und eben so brauchen wir auch auf den zuerst erschienenen Beweis des Hrn. Gauß keine Rücksicht zu nehmen, weil dieser sich auf geometrische Betrachtungen stützet. Inzwischen wäre es leicht darzuthun, daß auch in ihm unser Satz stillschweigend angenommen wird, indem die geometrischen Betrachtungen, die in ihm angestelit werden, ganz jenen ähnlich sind, deren wir n°. I. erwähnet. — Alles kömmt also nur noch auf des Herrn Gauß Demonstratio nova altera und tertia an. Jene beruft sich auf unsern Satz ausdrücklich; indem sie S. 30 voraussetzt: aequationem ordinis imparis certo solubilem esse; eine Behauptung, die bekanntlich nichts anders, als eine leichte Folgerung aus unserm Satze ist. Nicht so offenbar ist es bey der Demonstratio nova tertia. daß sie von unserm Satze abhängt. Sie gründet sich unter Anderm auf folgenden Lehrsatz:

---

*) In dem Journal de l'école normale, oder auch in des la Croix Traité du calcul diff. et int. T. I. n°. 162, 163.

Wenn eine Function für alle Werthe ihrer veränderlichen Größe x, die zwischen α und β liegen, stets positiv verbleibt; so hat auch ihr Integral, so genommen, daß es für $x = \alpha$ verschwindet, und daß hierauf $x = \beta$ gesetzt ist, einen positiven Werth. Nun findet man zwar in dem Beweise, den uns La Grange*) für diesen Lehrsatz geliefert, keine ausdrückliche Berufung auf den unsrigen. Allein dieser La Grangesche Beweis hat auch noch eine Lücke. Er fordert nähmlich, die Größe i so klein zu nehmen, daß

$$((f(x + i) - f (x))/i - f '(x) < (f '(x) + f '(x+ i) + f '(x+2i) + ...+ f '(x +(n-1)i))/n$$

werde, wobey das Product i.n einer gegebenen Größe gleich bleiben soll, und die bekannte Bezeichnung $f '(x)$ die erste abgeleitete Function von $f(x)$ vorstellt. Hier entsteht nun die Frage, ob die Erfüllung dieser Forderung auch möglich sey? Je kleiner man i nimmt, um den Unterschied $(f(x + i) - f(x))/i - f '(x)$ zu vermindern, desto größer muß man auch n, den Divisor in dem Ausdrucke rechter Hand annehmen, wenn $i\cdot n$ stets der gegebenen Größe gleich bleiben soll. Nun vermehret sich zwar auch die Menge der Glieder in dem Zähler: ob aber diese Vermehrung den Zähler neben dem Verhältnisse, wie der Nenner wächst, vergrößere, ob sich der Werth des ganzen Bruches durch die Verminderung von i, nicht vielleicht eben so stark oder noch stärker vermindere, als der Ausdruck

$$((f(x + i) - f(x))/i – f '(x),$$

das ist noch zu erweisen. Soll diese Lücke nun ausgefüllt werden; so wird dieß wohl nur durch Berufung auf unsern gegenwärtigen Satz geschehen können; da wir uns schon bey dem Beweise eines mit diesem La Grangeschen verwandten, obgleich viel einfacheren Lehrsatzes **) auf ihn beziehen mußten.

---

*) Leçons sur le Calcul des fonctions. Nouvelle Edition. Paris. 1806. Leç. 9. p. 89.

**) Nähmlich des Satzes § 29 in der Abhandlung: der binomische Lehrsatz u. s. w.

So mangelhaft also sind alle bisherigen Beweise des Satzes, der auf dem Titel dieser Abhandlung genannt ist. Derjenige nun, den ich hier der Beurtheilung der Gelehrten vorlege, enthält, wie ich mir schmeichle, nicht eine bloße Gewißmachung, sondern die objective Begründung der zu beweisenden Wahrheit; d. h. er ist echt wissenschaftlich.*)

Folgendes ist eine kurze Uibersicht des Ganges, den er nimmt.

Die zu beweisende Wahrheit, daß zwischen den zwey Werthen a und b, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, jederzeit wenigstens eine reelle Wurzel liege, beruhet offenbar auf jener allgemeineren, daß, wenn zwey stetige Functionen von x, $f(x)$ und $\varphi(x)$, von solcher Beschaffenheit sind, daß für $x = \alpha$, $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, für $x = \beta$ aber $f(\beta) > \varphi(\beta)$ ausfällt, allemahl irgend ein zwischen α und β liegender Werth von x vorhanden seyn müsse, für welchen $f(x) = \varphi(x)$ wird. Allein wenn $f(a) < \varphi(\beta)$ ist; so ist vermöge des Gesetzes der Stetigkeit auch noch $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, wenn man nur i klein genug annimmt. Die Eigenschaft

*) Doch erwarte man nicht, daß ich hier etwa schon alle Regeln befolge, die in den Beyträgen zu einer begründeteren u. s. w. (II. A.bth.) für die Construction eines echt wissenschaftlichen Vortrags von mir selbst aufgestellt worden sind. Denn bin ich gleich von der Richtigkeit dieser Regeln noch immer vollkommen überzeuget; so ist doch eine genaue Befolgung derselben nur dort allein möglich, wo man den Vortrag einer Wissenschaft von ihren ersten Sätzen und Begriffen anfängt; nicht aber dort, wo man nur einige Lehren derselben, herausgehoben aus dem Zusammenhange des Ganzen abhandelt; wie dieses hier geschieht. Diese Bemerkung ist denn, wie sich von selbst versteht, auch auf die Abhandlung über den binomischen Lehrsatz zu beziehen.

des Kleinerseyns also kömmt der Function von i, die der Ausdruck f(α+ i) darstellt, für alle Werthe von i zu, die kleiner sind, als ein gewisser. Gleichwohl kömmt diese Eigenschaft ihr nicht für alle Werthe von i ohne Einschränkung zu; nahmentlieh nicht für ein i, daß = β - α wäre; indem f(β) schon > φ(β) ist. Nun gilt der Lehrsatz, daß so oft eine gewisse Eigenschaft M allen Werthen einer veränderlichen Größe i, die kleiner als ein gegebener sind, und doch nicht allen überhaupt zukömmt: so gibt es jederzeit irgend einen größten Werth u, von dem behauptet werden kann, daß alle i, die < u sind, die Eigenschaft M besitzen. Für diesen Werth von i selbst kann nun f(α + u) nicht < φ(α+ u) seyn; weil sonst nach dem Gesetze der Stetigkeit auch noch f(α+ u + ω) < φ(α+ u + ω) wäre, wenn man ω nur klein genug annähme. Und folglich wäre es nicht wahr, daß u der größte von den Werthen ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende Werthe von i, f(α+ i) < φ(α + i) machen; sondern u + ω wäre ein noch größerer Werth, von dem dasselbe gilt. Noch weniger aber kann f(α+u) > φ(α+ u) seyn; indem sonst auch f(α + u - ω) > φ(α + u - ω) seyn müßte, wenn man o klein genug nimmt; und folglich wäre es nicht wahr, daß für alle Werthe von i, die < u sind, f(α+ i) < φ(α+ i) sey. So muß denn also f(α + u) = φ(α+ u) seyn; d. h. es gibt einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nähmlich a + u, für welchen die Functionen f(x) und φ(x) einander gleich werden. Es handelt sich nur noch um den Beweis des erwähnten Lehrsatzes. Diesen erweisen wir nun, indem wir zeigen, daß jene Werthe von i, von welchen behauptet werden kann, daß alle kleineren die Eigenschaft M besitzen, und jene, von denen sich dieß nicht mehr behaupten läßt, einander so nahe gebracht werden können, als man nur immer will; woraus sich für Jeden, der einen richtigen Begriff von Größe hat, ergibt, daß der Gedanke eines i, welches das größte derjenigen ist, von denen gesagt werden mag, daß alle unter ihm stehende die Eigenschaft M besitzen, der Gedanke einer reellen d. h. wirklichen Größe sei.

***

Bevor ich noch diese Vorrede schließe, mögen mir ein Geständniß und eine Bitte erlaubt seyn, welche sich nicht bloß auf diese gegenwärtige, sondern auf meine sämmtlichen, auch, so Gott will, künftigen Schriften beziehen. Schon aus dem Wenigen, so bisher erschienen ist, vornehmlich aber aus jenem Grundrisse einer neuen Logik, den die erste Lieferung der Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik in ihrer zweyten Abtheilung unter der Uiberschrift: über die mathematische Methode, liefert, konnte ein aufmerksamer Leser entnehmen, daß ich gewisse Ansichten hege, die, werden sie anders nicht als durchaus unrichtig befunden werden, eine gänzliche Umstaltung aller rein apriorischen Wissenschaften zur Folge haben müssen. Den größten und wichtigsten Theil dieser Ansichten habe ich bereits durch eine so lange Zeit und mit so vieler Unbefangenheit geprüfet; daß es wohl nicht mehr zu frühe ist, wenn ich jetzt etwas lauter davon zu sprechen wage. Es können aber Ansichten, welche das ganze Gebiet einer oder mehrerer Wissenschaften umfassen, auf eine doppelte Art bekannt gemacht werden; indem man sie entweder auf einmahl und im Zusammenhange, oder auch theilweise und in einzelnen Abhandlungen vorträgt. Die erste Art ist bisher bey weitem die gewöhnlichste gewesen; und ohne Zweifel auch der Weg, den jeder einschlagen muß, dem es nur darum zu thun ist, um in der kürzesten Zeit zu großem Ansehen bei dem gelehrten Theile seiner Zeitgenossen zu gelangen. Für die Vervollkommnung der Wissenschaften aber däucht mir die zweyte Verfahrungsart viel zuträglicher zu seyn; und zwar aus folgenden Gründen:

Erstlich, weil der Entdecker der neuen Ansichten auf diese Art viel weniger Gefahr läuft, sich zui übereilen; indem der theilweise Vortrag seiner Meinungen ihm gestattet, seine Erklärung über Puncte, worüber er anfangs noch selbst im Zweifel steht, auf eine spätere Zeit zu verschieben; aus den Beurtheilungen aber, die das schon Vorgetragene erfährt, zu lernen, und manches unrichtig Gegebene noch zu berichtigen.

Zweytens läßt sich bey einer solchen bloß theilweise vor sich gehenden Entfaltung seiner Ansichten auch eine weit strengere Prüfung derselben von Seite der Leser erwarten. Denn wer mit einem schon vollendeten Systeme auftritt, bietet der Aufmerksamkeit unseres Geistes auf einmahl eine zu große Anzahl neuer Behauptungen dar, als daß zu hoffen wäre, wir werden jede derselben mit eben der Genauigkeit prüfen, als wenn sie uns einzeln vorgelegt worden wäre. Wer einen vollständigen Lehrbegriff liefert, zeigt, oder soll we-nigstens zeigen, wie auch aus seinen abweichenden Vorder-sätzen sich jene Wahrheiten, die der gesunde Menschen-verstand mit unläugbarer Sicherheit erkennt, herleiten lassen. Gerade dieses aber söhnt uns mit jenen Vordersätzen aus, und macht, daß wir sie ihm viel unbedenklicher zugeben werden, als wenn er sie einzeln aufgestellt, und uns in Zweifel gelassen hätte, ob und in wie fern sie sich mit allem Uibrigen, was für uns Wahrheit ist, vertragen. Endlich ist wohl auch nicht zu läugnen, daß schon der bloße Anblick eines dickleibigen Buches, das ein vollständiges System dieser oder jener Wissenschaft verspricht, uns eine Art von Achtung einflöße, bevor wir es noch gelesen haben. Entdec-ken wir nun beym Lesen selbst einen gewissen Zusammen-hang in den Behauptungen desselben; hat das Gebäude des menschlichen Wissens, das man uns hier im Grundrisse darstellt, eine gefällige Form; ist alles angelegt nach Maß und und Zahl und Symmetrie: so wird unser Urtheil bestochen; so fangen wir selbst an zu winschen, hier endlich möchte doch jenes einzig richtige System, das wir so lange schon gesucht, vorhanden seyn! Und das Geringste, was erfolgt, ist, daß wir uns einbilden, um des bemerkten Zusammenhanges willen stehe uns höchstens Eines von Beydem frey, entweder das Ganze anzunehmen, oder das Ganze zu verwerfen; während doch in der That weder das Eine, noch das Andere geschehen sollte!

Dieß ohngefähr waren die Gründe, aus welchen ich schon im Jahre 1804 beschloß, in keiner Wissenschaft je mit der Herausgabe eines vollständigen Lehrbuchs anzufangen; sondern in jeder meine von den gewöhnlichen abweichenden Begriffe nur erst in einzelnen Abhandlungen bekannt zu machen. Und, wenn diese nach vielfältiger Berichtigung bey einem Theile des Publicums Beyfall gefunden haben, dann erst soll an die Ausfertigung ganzer Systeme gedacht werden, wird anders nicht dieß letztere Geschäft der Tod Andern zu iberlassen gebieten.

Ich fing denn meine schriftstellerische Laufbahn mit einer die Mathematik betreffenden Abhandlung an und trug unter dem Titel: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie (Prag, bey C. Barth. 1804), nebst mehreren andern Ansichten, eine neue Theorie der Parallelen vor *). Einige Jahre hierauf faßte ich den Entschluß, meine gesammten in das Gebiet der Mathematik gehörigen Ansichten unter dem Titel: Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, lieferungsweise herauszugeben. Allein gleich die erste dieser Lieferungen (Prag, bey C. Widtmann, 1810) hatte bey aller Wichtigkeit ihres Inhaltes das Unglück, in einigen gelehrten Zeitschriften gar nicht, in andern nur sehr oberflächlich angezeigt und beurtheilt zu werden. Dieß nöthigte mich, die Fortsetzung dieser Beyträge auf eine spätere Zeit zu verschieben, und mittlerweile erst zu versuchen, ob es mir nicht vielleicht gelänge, mich durch die Herausgabe einiger Abhandlungen, welche durch ihren Titel geeigneter wären, Aufmerksamkeit zu erregen, der gelehrten Welt etwas bekannter zu machen. Zu diesem Zwecke

*) Diese Theorie dürfte wenigstens des doppelten Umstandes wegen Aufmerksamkeit verdienen: erstlich, weil sie die einzige ist, der man doch keinen offenbaren Fehler nachzuweisen vermochte; dann weil der größte jetzt lebende Geometer Frankreichs, Legendre, in der zehnten Ausgabe seiner Elemens de Geometrie. Paris. 1813 gewiß ganz unabhängig von mir, auf eben dieselbe Ansicht der Dinge verfallen ist.

erschien im J. 1816 der schon vorhin erwähnte binomische Lehrsatz u. s. w. (Prag, bey Enders). Zu diesem Zwecke soll, meinem Wunsche nach, auch die gegenwärtige Abhandlung dienen, deren Herausgabe überdieß noch dadurch nöthig wurde, weil ich mich auf den Satz, den sie beweiset, in jener früheren schon berufen hatte. Einige andre Abhandlungen, welche schon gleichfalls druckfertig ausgearbeitet sind, z. B. eine, welche den Titel fihren soll: Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, erwarten noch ihre Verleger.

Soll ich nun ferner auf diesem Wege, der mir der zuträglichste scheint, fortfahren können: so bestehet die einzige Gunst des Publicums, um die ich bitten muß, darin, daß man diese einzelne Abhandlung ihres geringeren Umfanges wegen nicht übersehe, sondern sie vielmehr prüfe mit aller nur möglichen Strenge, die Resultate dieser Prtifung aber öffentlich kund machen wolle, damit, was vielleicht undeutlich gesagt ist, deutlicher erkläret, was ganz unrichtig ist, widerrufen werde, das Wahre und Richtige aber je eher je lieber zur allgemeinen Annahme gelange.

§. 1.

Willkürlicher Satz. Wenn bei einer Reihe von Größen nicht etwa der besondere Fall obwaltet, daß anzufangen von einem gewissen Gliede die folgenden alle, jedes fir sich, Null sind, wie dieses Letztere z. B. bey der Binomialreihe für jeden positiven und ganz zähligen Exponenten n, nach dem (n + 1ten) Gliede geschieht: so ist es offenbar, daß der Werth dieser Reihe, d. h. die Größe, die durch Summirung ihrer Glieder entsteht, nicht immer einerley verbleiben könne, wenn man die Menge der Glieder nach Belieben vermehret. Insonderheit muß sich dieser Werth gewiß jedesmahl ändern, wenn man die Anzahl der Glieder nur um ein einzelnes, welches nicht Null ist, vermehret. Der Werth einer Reihe ist daher nebst dem Gesetze, welches die Bildung ihrer einzelnen Glieder bestimmt, auch noch von ihrer Anzahl abhängig; so daß derselbe auch bey unveränderter Gestalt und Größe der einzelnen Glieder eine veränderliche Größe vorstellt. In dieser Rücksicht bezeichnen wir eine Function von x, welche aus einer beliebig zu vermehrenden

Reihe von Gliedern bestehet, und deren Werth sonach nebst x auch noch von ihrer Gliederzahl r abhängig ist, durch $F_{(r)}(x)$, oder $F_r(x)$. So ist
z. B.

$$A + Bx + Cx^2 ... + Rx^r = F_r(x);$$

dagegen

$$A + Bx + Cx^2 ... + Rx^r + ... + Sx^{r+s} = F_{r+s}(x).$$

§. 2.

1. Zusatz. Die Werthveränderung, d. h. die Zu oder Abnahme des Werthes, die eine Reihe durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl um eine bestimmte Menge, z. B. um eines, erfährt, kann nach Beschaffenheit der Umstände bald eine beständige Größe (wenn nähmlich die Glieder der Reihe einander alle gleich sind), bald aber auch eine veränderliche seyn; und in diesem Falle bald eine Größe, die zuweilen wächst zuweilen abnimmt, bald eine, die beständig wächst, bald eine, die beständig abnimmt. So ist die Aenderung, welche die Reihe

$$1 + 1 + 1 + 1 + ...$$

erfährt, wenn sie um ein Glied vermehret wird, eine beständige Größe; die Aenderung, welehe die Reihe

$$a +- ae + ae^2 + ae^3 + ...$$

durch die Vermehrung um ein Glied erfährt, eine veränderliche Größe, wenn anders nicht etwa $e = 1$ ist, wird immer größer, wenn $e > \pm 1$, und immer kleiner, wenn $e < \pm 1$.

§. 3.

2. Zusatz. Wenn die Werthänderung (Zu- oder Abnahme), die eine Reihe durch Vermehrung ihrer Gliedermenge um eine bestimmte Anzahl (z. B. um eines) erleidet, immer gleich groß verbleibt, oder gar immer größer wird; in beyden Fällen auch noch einerley Vorzeichen behält: so ist es einleuchtend, daß der Werth dieser Reihe größer als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man dieselbe weit genug fortsetzen darf. Denn gesetzt der Zuwachs, den die Reihe durch eine Vermehrung von je n Gliedern erfährt, sey = oder > d, und man begehre die Reihe so groß zu machen, daß sie die gegebene Größe D iiberschreitet: so nehme man nur eine ganze Zahl

r, die = oder > D/d, und verlängere die Reihe um r.n Glieder; so hat dieselbe hiedurch einen Zuwachs erhalten, der = oder > (r.d = oder > (D/d)d = D) ist.

§. 4.

3. Zusatz. Dagegen gibt es auch Reihen, deren Werth, so weit man sie fortsetzen mag, eine gewisse Größe nie überschreitet. Von dieser Art ist gleich die Reihe:

$$a - a + a - a + \ldots,$$

deren Werth, so weit man sie fortsetzen mag, immer entweder 0 oder a ist, also die Größe a nie iberschreitet.

§. 5.

4. Zusatz. Unter diesen ist besonders merkwürdig die Classe derjenigen Reihen, welche die Eigenschaft besitzen, daß die Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche ihr Werth durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung ihrer Glieder erleidet, immer kleiner verbleibt, als eine gewisse Größe, die wieder selbst so klein, als man nur immer will, angenommen werden, kann, wenn man die Reihe schon vorher weit genug fortgesetzt hat. Daß es dergleichen Reihen gebe, beweiset uns nicht nur das Beyspiel aller derjenigen, deren Glieder, hinter einem gewissen, alle der Null gleich sind, die also eigentlich iber dieß Glied hinaus gar keiner Fortsetzung, noch Werthveränderung mehr fähig sind, wie die Binomialreihe des §. 1: sondern von dieser Art sind auch alle Reihen, deren Glieder entweder eben so oder noch stärker abnehmen, als die einer geometrischen Progression. deren Exponent ein echter Bruch ist. Denn der Werth der geometrischen Reihe $a + ae + ae^2 + ae^r + \ldots$ ist bekanntlich $= a(1\text{-}e)^{r+1}/(1\text{-} e)$. Wird aber diese Reihe noch um s Glieder verlängert, so ist der Zuwachs $ae^{r+1} + ae^{r+2} + ae^{r+3} + \ldots + ae^{r+s} = ae^{r+1}(1 - e^s)/(1 - e)$. Wenn nun $e < \pm 1$; so verbleibt dieser Zuwachs, wenn man erst r hinlänglich groß genommen hat, kleiner als jede gegebene Größe, wie groß auch s hinterher anwachsen mag. Denn weil e^s immer $< \pm 1$ verbleibt, so ist $ae^{r+1}(1 - e^s)/(1 - e)$ offenbar immer kleiner als $2ae^{r+1}/(1 - e)$. Letztere Größe aber kann durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene werden; indem derjenige Werth, den sie für ein nächst größeres r annimmt, aus dem nächst vorhergehenden durch die Multiplication mit c, einem echten und unveränderlichen Bruche entstehet. (S. den

binomischen Lehrsatz §. 22.) Es läßt sich also jede geometrische Progression, deren Exponent ein echter Bruch ist, erst so weit fortsetzen, daß der Zuwachs, der ihr hierauf durch jede noch fernere Fortsetzung zu Theil werden kann, kleiner als irgend eine gegebene Größe verbleiben muß. Um desto mehr muß dieses von einer Reihe gelten, deren Glieder noch stärker abnehmen, als die einer fallenden geometrischen Progression.

§. 6.

5. Zusatz. Wenn man den Werth, welchen die Summe der ersten n, n + 1, n + 2, ..., n + r Glieder einer wie § 5 beschaffenen Reihe hat, der Ordnung nach durch

$F_n(x), F_{n+1}(x), F_{n+2}(x), ..., F_{n+r}(x)$

bezeichnet (§. 1.): so stellen die Größen

$F_1(x), F_2(x), F_3(x), ..., F_n(x), .., F_{n+r}(x), ...$

nun eine neue Reihe vor (die summatorische der vorigen genannt). Diese hat der gemachten Voraussetzung nach die besondre Eigenschaft, daß der Unterschied, der zwischen ihrem nten Gliede $F_n(x)$ und jedem späteren $F_{n+r}(x)$, es sey auch noch so weit von jedem nten entfernt, kleiner als jede gegebene Größe bleibt, wenn man erst n groß genug angenommen hat. Dieser Unterschied ist nähmlich der Zuwachs, den die ursprüngliche Reihe durch eine Fortsetzung über ihr ntes Glied hinaus erfährt; und dieser Zuwachs soll der Voraussetzung nach so klein verbleiben können, als man nur immer will, wenn man erst n groß genug angenommen hat.

§. 7.

Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen

$F_1(x), F_2(x), F_3(x), ..., F_n(x), .., F_{n+r}(x), ...$

von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem nten Gliede $F_n(x)$ und jedem späteren $F_{n+r}(x)$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse beständige Größe, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.

Beweis. Daß eine solche Reihe, wie sie der Lehrsatz beschreibt, möglich sey, erhellet aus § 6.

Die Annahme aber, daß eine Größe X vorhanden sey, der sich die Glieder dieser Reihe bey immer weiterer. Fortsetzung so sehr, als man nur immer will, nähern, enthält auch gewiß nichts Unmögliches, wenn man noch nicht voraussetzt, daß diese Größe nur eine einzige und unveränderliche sey.
Denn wenn es eine Größe, welche sich ändern darf, seyn soll; so wird man sie freylich jederzeit so annehmen können, daß sie dem Gliede $F_n(x)$, welches man eben jetzt mit ihr vergleicht, recht nahe kommt, ja mit ihm völlig einerley ist. Daß aber die Voraussetzung auch einer unveränderlichen Größe, die diese Eigenschaft der Annäherung an die Glieder unsrer Reihe hat, keine Unmöglichkeit enthalte; folgt daraus, weil es bey dieser Voraussetzung möglich wird, diese Größe so genaul, als man nur immer will, zu bestimmen. Denn gesetzt, man wollte X so genau bestimmen, daß der Unterschied zwischen dem angenommenen und dem wahren Werthe von X eine auch noch so kleine gegebene Größe d nicht überschreitet: so suche man nur in der gegebenen Reihe ein Glied $F_n(x)$ von der Beschaffenheit aus, daß jedes folgende $F_{n+r}(x)$ von ihm um weniger als $\pm d$ verschieden sey. Ein solches $F_n(x)$ muß es nach der Voraussetzung geben. Ich sage nun, der Werth von $F_n(x)$ sey von dem wahren Werthe der Größe X höchstens um $\pm d$ verschieden. Denn wenn man bey einerley n, r nach Belieben vergrößert, so muß der Unterschied $X - F_{n+r}(x) = \pm\omega$ so klein werden können, als man nur immer will. Der Unterschied $F_n(x) - F_{n+r}(x)$ bleibt aber jederzeit, so groß man auch r nehme, $< \pm d$. Also muß auch der Unterschied

$$X - F_n(x) = (X - F_{n+r}(x)) - (F_n(x) - F_{n+r}(x)$$

jederzeit $< \pm d$ $(d + \omega)$ verbleiben. Da aber derselbe bey einerley n eine beständige Größe ist, ω dagegen durch die Vergrößerung von r so klein gemacht werden kann, als man nur immer will: so muß $X - F_n(x) =$ oder $< \pm d$ seyn. Denn wäre es größer und z. B. $= \pm(d + e)$; so könnte unmöglich das Verhältniß $d + e < d + \omega$, d. h. $e < \omega$ bestehen, wenn man ω immer mehr verkleinert. Der wahre Werth von X ist also von dem Werthe, den das Glied $F_n(x)$ hat, höchstens um d verschieden und läßt sich daher, da man d nach Belieben klein annehmen kann, so genau, als man nur immer will, bestimmen. Es gibt also eine reelle Größe, der sich die Glieder der von uns besprochenen Reihe so sehr, als man nur immer will, nähern, wenn man sie weit genug fortsetzt. Aber nur eine einzige dergleichen Größe gibt es. Denn nähmen wir an, daß es nebst X noch eine andre beständige Größe Y gäbe, der sich die Glieder der Reihe so sehr, als man nur immer will, inähern, wenn man sie weit genug fortsetzt: so müßten die Unterschiede $X - F_{n+r}(x) = \omega$, und $Y - F_{n+r}(x) = \omega_1$ so klein werden können, als man nur immer will, wenn man r groß genug werden ließe. Dasselbe müßte also auch von ihrem eigenen Unterschiede, d. h. von $X - Y = \omega - \omega_1$ gelten; welches, wenn X und Y beständige Größen seyn sollen, unmöglich ist, falls man nicht X = Y voraussetzt.

§ 8.

Anmerkung. Wenn man den Werth der Größe X auf die Art, wie es im vorigen § geschehen, nämlich durch irgend eines der Glieder selbst, aus welchem die gegebene Reihe zusammengesetzt ist, zu bestimmen sucht: so wird man, wenn anders die Glieder dieser Reihe nicht, anzufangen von einem gewissen, einander alle gleich sind, X niemahls ganz genau bestimmen. Man hüthe sich aber, hieraus zu schließen, daß die Größe X allemahl irrational seyn müsse. Denn wenn uns z. B. die Reihe

0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; ...

(welche die summatorische der geometrischen

1/10, 1/100, 1/1000, 1,10000, ...

ist) vorgelegt wäre: so wäre die Größe, der sich ihre Glieder so sehr, als man nur immer will, nähern, keineswegs irrational, sondern der Bruch 1/9. Daraus nähmlich, daß eine Größe sich auf einem gewissen Wege nicht genau bestimmen läßt, folget noch nicht, daß sie auf keinem andern völlig bestimmbar, und also irrational sey.

§. 9.

Zusatz. Wenn also irgend eine gegebene Reihe von der Beschaffenheit ist, daß jedes einzelne ihrer Glieder endlich, die Veränderung aber, die sie durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung erfährt, kleiner als jede gegebene Größe ausfällt, sobald man nur die Anzahl ihrer bisherigen Glieder groß genug genommen hat: so gibt es jederzeit eine, aber auch nur eine beständige Größe, welcher der Werth dieser Reihe so nahe tritt, als man nur immer will, wenn man sie weit genug fortsetzt. Denn eine solche Reihe ist von der Art der § 5 beschriebenen, und folglich bilden die Werthe, welche die Summe ihrer n, n + 1, ... Glieder ersteigt, eine Reihe, wie die der §§. 6 und 7; mithin kömmt ihnen auch die §. 7 erwiesene Eigenschaft zu.

§ 10.

Anmerkung. Man glaube ja nicht, daß in dem obigen Satze §. 9 die Bedingung, "daß die Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche die Reihe durch jede Fortsetzung erfährt, kleiner als jede gegebene Größe müsse bleiben können, wenn man sie vorhin schon weit genug fortgesetzt hat", – überflüssig sey; und daß der Satz vielleicht mit einer größeren Allgemeinheit auch so ausgedrückt werden könnte: "Wenn die Glieder einer Reihe durch ihre Fortsetzung stets kleiner und so klein zu werden vermögen, als man nur immer will: so gibt es jedesmahl auch eine beständige Größe, der sich der Werth der Reihe bey ihrer Fortsetzung so sehr, als man nur immer will, nähert." Diese Behauptung würde gleich folgendes Beyspiel widerlegen. Die Glieder der Reihe

$1/2+ 1/3 + 1/4 +1/5 + ...$

können so klein werden, als man nur immer will; und doch ist es eine aus den Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel bekannte (aber auch aus rein arithmetischen Betrachtnngen herleitbare) Wahrheit, daß dieser Reihe Werth größer, als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man sie weit genug fortsetzt.

§. 11.

Vorerinnerung. In Untersuchungen der angewandten Mathematik ereignet sich öfters der Fall, daß man von einer veränderlichen Größe x erfährt, es komme allen ihren Werthen. die kleiner als ein gewisser u sind, eine bestimmte Eigenschaft M zu; ohne zu gleicher Zeit zu erfahren, daß diese Eigenschaft Werthen, die größer sind als u, nicht mehr zukomme. In solchen Fällen kann es vielleicht noch manches u_1, das > u ist, geben, von dem es gleicher Weise wie von ul gilt, daß alle unter ihm stehende Werthe von x die Eigenschaft M besitzen, ja diese Eigenschaft kann vielleicht allen x ohne Ausnahme zukommen. Wenn man dagegen nur noch dieß Eine erfährt, daß M nicht allen x überhaupt eigen sey: so wird man aus der Vereinigung von diesen beyden Angaben nun schon berechtigt seyn zu schließen, es gebe eine gewisse Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen es wahr seyn kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft MI besitzen. Dieses beweiset der folgende Lehrsatz.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werthen einer veränderlichen Größe x, wohl aber allen, die kleiner sind, als ein gewisser u, zukömmt: so gibt es allemahl eine Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.

Beweis. 1. Weil die Eigenschaft M von allen x, die kleiner sind als u, und gleichwohl nicht von allen überhaupt gilt; so gibt es sicher irgend eine Größe $V = u + D$ (wobey D etwas positives vorstellt), von der sich behaupten läßt, daß M nicht allen x, die $< V = u + d$ sind, zukomme. Wenn ich daher die Frage aufwerfe, ob M wohl allen x, die $< u + D/2^m$ sind, zukomme? und den Exponenten m der Ordnung nach, erst 0, dann 1, dann 2, dann 3, u. s. w. bedeuten lasse: so bin ich gewiß, daß man die erste meiner Fragen mir wird verneinen müssen. Denn die Frage, ob M wohl allen x, die $< u + D/2^0$ sind, zukomme, ist einerley mit der, ob M allen x, die $< u + D$ sind, zukomme; welches nach der Voraussetzung zu verneinen ist. Es kömmt nur darauf an, ob man mir auch alle folgenden Fragen, welche entstehen, indem ich m nach und nach immer größer ansetze, verneinen wird. Sollte dieses der Fall seyn; so ist einleuchtend, daß u selbst der größte der Werthe ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle x, die kleiner als er sind. die Eigenschaft M besitzen. Denn gäbe es noch einen größeren z. B. $u + d$; d. h. gälte die Behauptung, daß auch noch alle x, die $< u + d$ sind, die Eigenschaft M haben: so ist doch offenbar, daß wenn ich m groß genug annehme, $u + D/2^m$ einmahl = oder $< u + d$ wird; und folglich müßte, wenn M allen x, die $< u + d$ sind, zukömmt, dasselbe auch allen, die $< u + D/2^m$ sind, zukommen; also hätte mir diese Frage nicht verneint, sondern bejahet werden müssen. Es ist daher erwiesen, daß es in diesem Falle (wo man mir alle obigen Fragen verneint) eine gewisse Größe U (nähmlich u selbst) gebe, welche die größte derjenigen ist, von denen die Behauptung gilt, daß alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M besitzen.

2. Wird mir dagegen die obige Frage einmahl bejahet, und ist m der bestimmte Werth des Exponenten, bey dem man sie mir zuerst bejahet (m kann auch 1 bedeuten; aber, wie wir gesehen, nicht 0): so weiß ich nun, daß die Eigenschaft M allen x, die $< u + D/2^m$ sind, aber schon nicht mehr allen, die $< u +D/2^{m-1}$ sind, zukomme. Der Unterschied zwischen $u + D/2^{m-1}$ und $D/2^m$ ist aber $= D/2^m$. Wenn ich daher mit diesem wieder, wie vorhin mit dem Unterschiede D verfahre; d.

h. wenn ich die Frage aufwerfe, ob M wohl allen x, die $< u + D/2^m + D/2^{m+n}$ sind, zukomme; und hier den Exponenten n erst 0, dann 1, dann 2, u. s. w. bedeuten lasse: so bin ich abermahl gewiß, daß man mir wenigstens die erste dieser Fragen wird verneinen missen. Denn fragen, ob M allen x, die $< u + D/2^m + D/2^{m+0}$ sind, zukomme, heißt eben D so viel, als fragen, ob M allen x, die $< u + D/2^{m-1}$ sind, eigen sey; was man schon vorhin verneinet hatte. Sollte man aber auch alle meine folgenden Fragen verneinen, so groß ich auch n nach und nach mache: so würde, wie vorhin, erhellen, $u + D/2^m$ sey jener größte Werth, oder das U, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen.

3. Wird mir dagegen eine dieser Fragen bejahet, und geschieht dieß zuerst bey dem bestimmten Werthe n: so weiß ich nun, daß M allen x, die $< u + D/2^m + D/2^{m+n}$ sind, zukomme, aber schon nicht mehr allen, die $< u + D/2^m + D/2^{m+n-1}$ sind. Der Unterschied zwischen diesen beyden Größen ist $= D/2^{m+n}$; und ich verfahre mit ihm wieder, wie vorhin mit $D/2^m$. U.s.w.

4. Wenn ich auf diese Art so lange fortfahre, als man nur immer will; so sieht man, daß das Resultat, das ich zuletzt erhalte, eines von Beydem seyn muß.

a. Entweder ich finde einen Werth von der Form $u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+\ldots+r}$, der sich mir als der größte darstellt, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehenden x die Eigenschaft M besitzen. Dieß geschieht in dem Falle, wenn mir die Fragen, ob M allen x, die

$< u + D/2^m + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+\ldots+r+s}$, sind, zukomme, für jeden Werth von s verneinet werden.

b. Oder ich finde wenigstens, daß M zwar allen x, die

$< u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+\ldots+r}$ sind,

zukomme, aber schon nicht mehr allen, die $< u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+\ldots+r-1}$, sind. Hiebey steht es mir frey, die Anzahl der Glieder in diesen beyden Größen durch neue Fragen immer noch größer zu machen.

5. Ist nun der erste Fall vorhanden, so ist die Wahrheit des Lehrsatzes bereits erwiesen. Im zweyten Falle lasset uns bemerken, daß die Größe $u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r}$, eine Reihe

vorstelle, deren Gliederzahl ich nach Belieben vermehren kann, und die zur Classe der §. 5 beschriebenen gehöret; weil sie, je nachdem m, n, ..., r entweder alle = 1, oder zum Theile noch größer sind, entweder eben so, oder noch stärker abnimmt, als eine geometrische Progression, deren Exponent der echte Bruch 1/2 ist. Daraus ergibt sich, daß sie die Eigenschaft des § 9 habe; d. h. daß es eine gewisse beständige Größe gebe, der sie so nahe kommen kann, als man nur immer will, wenn man die Menge ihrer Glieder hinlänglich vermehret. Sey diese Größe U; so behaupte ich, die Eigenschaft M gelte von allen x, die < U sind. Denn gälte sie von irgend einem x; das < U ist, z. B. von U – δ nicht; so müßte die Größe $u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r}$, weil für alle x, die kleiner als sie sind, die Eigenschaft M Statt finden soll, immer den Abstand δ von U behalten. Denn jedes x, das

$$= u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r} - \omega$$

ist, so klein auch ω sey, besitzt die Eigenschaft M; dagegen dem x = U - δ soll sie nicht zukommen: also muß

$$U - \delta > u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r} - \omega \text{ oder}$$

$$U - (u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r}) > \delta - \omega \text{ seyn.}$$

Mithin könnte der Unterschied zwischen U und der Reihe nicht so klein werden, als man nur immer will; da δ – ω nicht so klein werden kann, als man nur immer will, indem sich δ nicht ändert, während ω kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag. – Eben so wenig kann aber M von allen x, die < U + ε sind, gelten. Denn weil der Werth der Reihe

$$u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r-1}$$

dem Werthe der Reihe

$$u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r}$$

so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will, in dem der Unterschied beyder nur $D/2^{m+n+\ldots+r}$ ist; weil ferner der Werth der letzteren Reihe der Größe U so nahe treten kann, als man nur immer will:so können auch der Werth der ersteren Reihe und U einander so nahe kommen, als man nur will. Also kann

$$u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r-1}$$

gewiß < U + ε werden. Nun aber gilt der Voraussetzung nach M nicht von allen x, die

$$< u + D/2^m + D/2^{m+n} + D/2^{m+n+\ldots+r-1}$$

sind; um desto weniger also von allen x, die < U+ ε sind. Also ist U der größte Werth, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen.

§. 13.

1. Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz ist von der größten Wichtigkeit und wird in allen Zweigen der Mathematik, in der Analysis sowohl, als in den angewandten Theilen, in der Geometrie, Chronometrie und Mechanik gebraucht. Statt seiner hatte man sich bisher nicht selten des falschen Satzes bedient: "Wenn eine Eigenschaft M nicht von allen x, wohl aber von allen, die kleiner als ein gewisses sind, gilt: so gibt es jederzeit irgend ein größtes x, welchem die Eigenschaft M11 zukömmt." Dieß, sage ich, ist zu Folge des so eben Erwiesenen falsch. Denn gibt es irgend eine Größe U, welche die größte unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M an sich haben: so gibt es eben darum sicher kein größtes x, dem diese Eigenschaft zukömmt, wenn anders x eine entweder frey oder doch stetig veränderliche Größe ist. Denn für eine jede frey oder nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe gibt es bekanntlich nie einen größten Werth, der kleiner als eine gewisse Grenze U ist; indem, so nahe sie auch schon an dieser Grenze stehen mag, sie ihr doch immer noch näher gebracht werden kann. – Man denke sich, um dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, eine rechtwinkelige Hyperbel, und nehme eine ihrer Asymptoten zur Abscissenlinie, und nicht den Mittelpunet c, sondern was immer für einen andern Punet a in dieser Asymptote, der die Entfernung D von c hat, zum Anfangspuncte der Abscissen an. Erklären wir nun die Richtung ac für die positive der Abscissen, und die Richtung ab, welche die rechtwinkelige Ordinate des Punctes a hat, für die positive der Ordinaten: so wird von jeder Abscisse x, die kleiner als eine gewisse z. B. kleiner als D/2 ist, die Eigenschaft gelten, daß ihr eine positive Ordinate entspricht. Gleichwohl wird diese Eigenschaft (M) nicht von allen positiven Abscissen gelten, nahmentlich nicht von solchen, die größer als D sind. Gibt es nun wohl hier eine größte Abscisse, einen größten Werth von x, welchem die Eigenschaft M zukömmt? Keineswegs; wohl aber gibt es ein U, d. h. eine Abscisse, welche die größte unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle kleineren als sie positive Ordinaten haben, d. h. die Eigenschaft M besitzen. Diese Abscisse nähmlich ist +D.

§. 14.

2. Anmerkung. Es dürfte Jemand vielleicht auf den Gedanken kommen, daß der Beweis des Lehrsatzes § 12 ganz kurz auf folgende Art hätte gefaßt werden können: "Gäbe es kein größtes U, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen: so würde man u immer größer und größer, und also so groß, als man nur immer will, nehmen können, und folglich müßte M von allen x ohne Ausnahme gelten. – Allein dieß wäre ein sehr fehlerhafter Schluß, indem er sich auf den stillschweigend angenommenen Obersatz stitzen würde: "daß eine Größe, die immer größer und größer genommen werden kann, als man sie schon genommen hat, so groß werden könne, als man nur immer will. Wie falsch dieses sey, beweiset z. B. die bekannte Reihe $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$, deren Werth immer größer und größer gemacht werden kann, als er schon ist, und gleichwohl immer < 1 verbleibt! – Wir würden eines so leicht einzusehenden Irrthums gar nicht erwähnen, wenn es nicht von Zeit zu Zeit geschähe, daß Mathematiker sich ihn zu Schuld kommen lassen, wie erst kürzlich Einer in seiner "vollständigen Theorie der Parallelen".

§. 15.

Lehrsatz. Wenn sich zwey Functionen von x, $f(x)$ und $\varphi(x)$, entweder für alle Werthe von x, oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, wenn ferner $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, und $f(\beta) >$ (p (β) ist: so gibt es jedesmahl einen gewissen zwischenα und β liegenden Werth von x, für welchen $f(x) = \varphi(x)$ wird.

Beweis. Wir müssen erinnern, daß in diesem Lehrsatze die Werthe der Funetionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ bloß ihrer absoluten Größe nach, d. h. ohne Rücksicht auf ein Vorzeichen, oder so, als ob sie gar keine des Gegensatzes fähige Größen wären, mit einander verglichen werden sollen. Wohl aber kommt es an auf die Bezeichnung, welche α und β haben.

I. Man nehme erstlich an, daß α und β beyde positiv sind, und daß (weil dieses dann gleichgültig ist) β die größere von beyden, und somit $\beta = \alpha + i$ sey, wo i eine positive Größe anzeigt. Weil nun $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ ist; so ist auch, wenn ω eine positive Größe anzeigt, die so klein werden kann, als man nur immer will, $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$. Denn weil sich $f(x)$ und $\varphi(x)$ für alle x, die zwischen α und β liegen, stetig verändern sollen; und $\alpha + \omega$ zwischen α und β liegt, so bald nur $\omega < i$ genommen wird: so müssen $f(\alpha + \omega) - f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha + \omega) - \varphi(\alpha)$ so klein werden können, als man nur will, wenn man ω klein genug nimmt. Es ist daher, wenn auch Ω, Ω' Größen bedeuten. die sich so klein machen lassen, als man nur immer will, $f(\alpha + \omega) - f(\alpha) = \Omega$, und $\varphi(\alpha + \omega) - \varphi(\alpha) = \Omega'$. Daher

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = \varphi(\alpha) - f(\alpha) + \Omega' - \Omega.$$

Allein $\varphi(\alpha) - f(\alpha)$ gleicht nach der Voraussetzung irgend einer positiven Größe von unveränderlichem Werthe A. Also ist

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = A + \Omega' - \Omega,$$

welches, wenn man Ω, Ω' klein genug werden läßt, d. h. wenn man dem ω einen sehr kleinen Werth ertheile, und dann noch um so mehr für alle kleineren Werthe, was positiv bleibt. Also läßt sich von allen ω, die kleiner als ein gewisses sind, behaupten, daß die zwey Functionen $f(\alpha + \omega)$ und $\varphi(\alpha + \omega)$ in dem Verhältnisse der kleineren Größe zu einer größeren stehen.

Bezeichnen wir diese Eigenschaft der veränderlichen Größe ω durch M; so können wir sagen, daß alle ω, die kleiner als ein gewisses sind, die Eigenschaft M besitzen. Daß aber diese Eigenschaft gleichwohl nicht allen Werthen von ω zukomme, nahmentlich nicht dem Werthe $\omega = i$; ist daraus klar, weil $f(\alpha + i) = f(\beta)$ nach der Voraussetzung nicht mehr $<$, sondern $>$ $\varphi(\alpha + i) = f(\beta)$ ist. Zufolge des Lehrsatzes § 12 muß es daher eine gewisse Größe U geben, welche die größte unter denjenigen ist, von denen sich behaupten läßt, daß alle ω die $< U$ sind, die Eigenschaft M an sich tragen.

2. Und dieses U muß innerhalb 0 und i liegen. Denn es kann erstlich nicht $= i$ seyn; indem dieß hieße, daß jedes $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$ sey, so oft nur $\omega < i$ ist, es möge übrigens dem Werthe i auch noch so nahe kommen. Allein ganz auf dieselbe Art, wie wir so eben erwiesen, daß die Voraussetzung $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ die Folge $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$ nach sich zieht, so bald man nur ω klein genug nimmt, läßt sich auch darthun, daß aus der Voraussetzung $f(\alpha + i) > \varphi(\alpha + i)$, die Folge $f(\alpha + i - \omega) > \varphi(\alpha + i - \omega)$ fließt, sobald man nur ω klein genug nimmt. Also ist es nicht wahr, daß die zwey Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für alle Werthe von x, die $< \alpha - i$ sind, in dem Verhältnisse der kleineren Größe zu einer größeren stehen. – Noch weniger kann zweytens $U > i$ seyn, weil sonst auch i einer der Werthe von ω wäre, die $< U$ sind, und daher auch $f(\alpha + i) > \varphi(\alpha + i)$ seyn müßte, was der Voraussetzung des Lehrsatzes geradezu widerspricht. Also liegt U, da es doch positiv ist, sicher zwischen 0 und i, und folglich $\alpha + U$ zwischen α und β.

3. Es frägt sich nun, in welchem Verhältnisse die Functionen f(x) und φ(x) für den Werth x = α + U zu einander stehen? Es kann zuvörderst nicht f(α + U) < φ(α + U) seyn; denn dieses gäbe auch f(α + U + ω) < φ(α + U + ω), wenn man ω(klein genug annähme; und folglich wäre α + U nicht der größte Werth, von dem behauptet werden kann, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M haben. – Eben so wenig kann zweytens f(α + U) > φ(α + U) seyn; weil dieß auch f(α + U – ω) < φ(α + U – ω) gäbe, sobald man ω nur klein genug nimmt; und also wäre gegen die Voraussetzung die Eigenschaft M nicht von allen x, die unter α + U stehen, wahr. Es bleibt denn also nichts anderes übrig, als daß f(α + U) = φ(α + U) sey; und folglich ist erwiesen, daß es einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nähmlich α+ U gibt, für welchen f(x) = φ(x) wird.

II. Derselbe Beweis ist auch auf den Fall anwendbar, wenn α und β beyde negativ sind; sobald man nur unter ω, i und U negative Größen verstehet;
indem α + ω, α + i, α + U, α + U – ω dann gleichfalls Größen zwischen α und β vorstellen.

III. Ist a 0 und β positiv, so nehme man nur auch i (= β), ω, U positiv; und ist β negativ, auch diese negativ: so wird sich der Beweis I. wörtlich anwenden lassen.

IV. Wenn endlich α und β von entgegengesetzter Art, und (weil dieß gleichgültig ist) z. B. α negativ, und β positiv ist: so sagt die Voraussetzung des Lehrsatzes in Betreff der Stetigkeit der Funetionen f(x) und φ(x), daß diese Stetigkeit sich auf alle Werthe von x erstrecke, die, wenn sie negativ, < α, und wenn sie positiv, < β sind. Unter diesen ist denn auch der Werth x = 0 begriffen. Man untersuche also das Verhältniß, welches f(x) und φ(x) für x = 0 haben. Ist f(0) = φ(0), so ist der Lehrsatz schon von selbst erwiesen. Ist aber f(0) > φ(0); so liegt, weil f(α) < φ(α) seyn soll, nach III. zwischen 0 und α; ist endlich f(0) < φ(0), zwischen 0 und β ein Werth, für welchen f(x) = φ(x) wird. Also gibt es in jedem Falle einen zwischen α und β liegenden Werth von x, der f(x) = φ(x) macht.

§. 16.

Anmerkung. Daß es nur einen einzigen Werth von x gebe, der f(x) = φ(x) macht,
wird hiermit keineswegs behauptet. Wenn nähmlich f(α) < φ(α), und f(α + U) = φ(α + U), so muß

zwar allerdings $f(\alpha + U + \omega) > \varphi(\alpha + U+ \omega)$ seyn; wenn man ω klein genug nimmt; d. h. die Function $f(x)$, die vorhin kleiner war, als $\varphi(x)$, muß bald darauf, nachdem beyde einander gleich geworden sind, größer als $\varphi(x)$ werden. Allein bey immer größerer Vermehrung von ω ist es wohl möglich, daß man, bevor $\alpha + U+ \omega$ noch $= \beta$ gemacht worden ist, auf Werthe kommt, die $f(x)$ abermahls $< \varphi(x)$ geben. In einem solchen Falle muß es, wie unmittelbar aus unserm Lehrsatze folgt, nebst U noch zwey andere zwischen α und β liegende Werthe von x geben, welche $f(x) = \varphi(x)$ machen. Denn es sey $f(\alpha + U + \kappa) < \varphi(\alpha + U + \kappa)$; so muß es, weil vorhin $f(\alpha + U + \omega)$ schon $> \varphi(\alpha + U + \omega)$ war, zwischen $\alpha + U + \omega$ und $\alpha + U + \kappa$, d. h. auch zwischen α und β, einen Werth von x geben, wofür $f(x) = \varphi(x)$ ist; und eben so, weil wieder $f(\alpha + i)$ oder $f(\beta) > \varphi(\beta)$ ist, auch zwischen $\alpha + U + \kappa$ und β noch ein Werth von x, der $f(x) = \varphi(x)$ macht. Auf diese Art erhellet, daß die Werthe von x, welche $f(x) = \varphi(x)$ machen, überhaupt immer nach einer ungeraden Zahl vorhanden seyn müssen.

§ 17.

Lehrsatz. Jede Function von der Form $a + bx^m + cx^n \pm \ldots \pm px^r$, in welcher m, n,... r ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werthe von x eine nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe.

Beweis. Denn wenn sich x in $x + \omega$ verändert; so ist die Aenderung, welche die Function erfährt, offenbar

$= b[(x + \omega)^m - x^m] + c[(x + \omega)^n - x^n] + \ldots + p[(x + \omega)^r - x^r]$; eine Größe, von der sich leicht darthun läßt, daß sie so klein werden könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn zu Folge des binomischen Lehrsatzes. dessen Gültigkeit für ganze positive Exponenten wir (§. 8 des binom. Lehrs.) unabhängig von den Untersuchungen, mit denen sich die gegenwärtige Abhandlung beschäftigt, dargethan haben, ist die Größe:

$$\omega\,[mbx^{m-1} + (m(m-1)/2)\,bx^{m-2}\omega + \ldots + b\omega^{m-1}$$
$$+ ncx^{n-1} + (n(n-1)/2)\,cx^{n-2}\omega + \ldots + c\omega^{n-1}$$
$$+ \ldots + rpx^{r-1} + (r(r-1)/2)px^{r-2}\omega + \ldots + p\omega^{r-1}]$$

Die Menge der Glieder, aus welchen der in den Klammern enthaltene Factor bestehet, ist, wie man weiß, immer nur endlich, und von dem Werthe der Größen x und ω unabhängig; und da diese überall nur in positiver Potenz erscheinen; so ist der Werth jedes einzelnen Gliedes, folglich auch des ganzen Ausdruckes für jeden Werth von x und ω, (auch für $x = 0$), immer nur endlich. Wird aber bey einerley x, ω verkleinert; so nehmen die Glieder, in denen ω vorkömmt, ab, während die übrigen ungeändert bleiben. Bezeichnen wir also durch S die Größe, die herauskommt, wenn man die Werthe, die alle einzelnen Glieder des Ausdruckes für ein bestimmtes ω, z. B. für ω_1 annehmen, so zu einander addirt, als ob sie alle einerley Vorzeichen hätten: so ist der wirkliche Werth, den dieser Ausdruck für eben dasselbe ω_1 hat, gewiß nicht > S, derjenige aber, den er für jedes kleinere ω annimmt, sicher < S. Verlangt man daher, daß die Veränderung, welche die Function $a + bx^m + cx^n$ +-... +- px^r erfährt, < D ausfalle; so nehme man nur ein ω, das zugleich $< \omega_1$, und auch < D/S ist: so wird ω.S, und um so mehr das Product aus ω in eine Größe, die < S ist, < D seyn müssen.

§. 18.

Lehrsatz. Wenn eine Function von der Form

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl bedeutet, für $x = \alpha$ einen positiven, für x == β aber einen negativen Werth annimmt; so hat die Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$$

wenigstens eine reelle Wurzel, die zwischen α und β liegt.

Beweis. 1. Wenn α und β beyde einerley Vorzeichen haben (beyde entweder positiv oder negativ sind); so ist es klar, daß eben dieselben Glieder der Function, welche für $x = \alpha$ positiv oder negativ werden, dieß Zeichen auch für $x = \beta$, und für die sämmtlichen Werthe von x, die zwischen α und β liegen, behalten. Wird nun der Werth der Function für $x = \alpha$ positiv, für $x = \beta$ aber negativ; so kann dieß nur daher rühren, weil die Summe der positiven Glieder in ihr für $x = \alpha$ größer, für x = ß aber kleiner, als die der negativen ausfällt. Aber die Summe jener sowohl als dieser ist von der Form

$$a + bx^m + cx^n \pm \dots \pm px^r$$

des §. 17, d. h. eine stetige Function. Bezeichnen wir also die eine durch $\varphi(x)$, die andere durch $f(x)$; so muß es, weil $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, und $f(\beta) > \varphi(\beta)$ ist, nach §. 15 irgend einen zwischen α und β gelegenen Werth von x geben, für welchen $f(x) = \varphi(x)$ wird. Für diesen Werth wird aber $f(x) - \varphi(x)$, d. h. die gegebene Function zu Null; also ist dieser Werth eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q = 0.$$

2. Sind aber α und β entgegengesetzt; so betrachte man den Werth, den die gegebene Function für $x = 0$ annimmt. Ist dieser Null; so ist von selbst erwiesen, daß die erwähnte Gleichung eine reelle, zwischen α und β liegende Wurzel habe; nähmlich $x = 0$. Ist aber dieser Werth (die Größe q) positiv; so weiß man jetzt, daß die gegebene Function für $x = 0$ positiv, für $x = \beta$ aber negativ werde; und weil dieselben Glieder, welche für $x = \beta$ positiv oder negativ werden, dieß Zeichen auch für alle zwischen 0 und β liegende Werthe von x behalten: so kann man ganz durch dieselben Schlüsse, wie in n°. 1 beweisen, daß zwischen 0 und β ein Werth von x liegen müsse, welcher die Function zu Null macht. Ist endlich q negativ; so gilt dasselbe, was wir so eben gesagt, wenn man nur α statt β setzt. Da nun ein zwischen 0 und β oder ein zwischen 0 und α liegender Werth auch zwischen α und β liegt, wenn beyde entgegengesetzt sind; so ist die Wahrheit unsers Lehrsatzes für jeden Fall erwiesen.